Distribuciones continua de carga.

Sttiwuer Díaz-Solórzano[a]

[a]*Grupo de Información y Comunicación Cuántica, Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, Edo. Miranda 89000, Venezuela.*

e-mail: sttiwuerdiaz@usb.ve, sttiwuer@yahoo.es

Índice

Índice de figuras

Índice de esquemas

1. Densidades de carga

Todo agregado o conglomerado de materia contiene masa y carga, esta última puede ser adquirida bien sea por contacto o por inducción, estos conglomerados de materia pueden distribuirse en una región limitada del espacio, con lo cual se logra formar una densidad de materia a partir de la comparación de la cantidad de masa o carga contenida en una región limitada del espacio. Por ello, la densidad es una magnitud física que establece la relación entre una fuente (carga o masa) y como estaría distribuida ésta en el espacio. En este contexto, la densidad de carga o masa se obtiene a partir de la relación entre la carga o masa y el espacio que contiene a dicha carga o masa. La comparación entre una cantidad infinitesimal de carga (dq) o de masa (dm) con la cantidad infinitesimal de espacio (de) determina lo que se conoce como densidad local de carga ($\mathscr{D}_Q$) o densidad local de masa ($\mathscr{D}_M$),

$$\mathscr{D}_Q = \frac{dq}{de} \quad \text{ó} \quad \mathscr{D}_M = \frac{dm}{de}, \tag{1.1}$$

mientras que la relación entre la carga Q o la masa M contenida en una cantidad de espacio finita $\mathscr{E}$ recibe el nombre de densidad media o promedio, ya que se obtienen de promediar la densidad local en una región limitada del espacio, esto es,

$$\langle \mathscr{D}_Q \rangle = \frac{1}{\mathscr{E}} \int \mathscr{D}_Q de = \frac{Q}{\mathscr{E}} \quad \text{ó} \quad \langle \mathscr{D}_M \rangle = \frac{1}{\mathscr{E}} \int \mathscr{D}_M de = \frac{M}{\mathscr{E}}, \tag{1.2}$$

Para obtener la carga o masa de un conglomerado de materia bastará integrar la densidad de carga en toda la extensión del conglomerado, en otras palabras, se debe integrar la expresión (1.1) en todo el espacio, o equivalentemente se usan las segundas igualdades de cada expresión de (1.2), esto es,

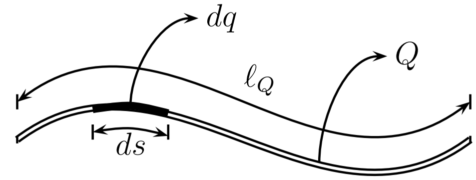
$$Q = \mathscr{E} \langle \mathscr{D}_Q \rangle = \int \mathscr{D}_Q de \quad \text{ó} \quad M = \mathscr{E} \langle \mathscr{D}_M \rangle = \int \mathscr{D}_M de. \tag{1.3}$$

Donde la integral se realiza sobre toda la extensión espacial de la distribución de carga o masa, respectivamente. Por otra parte, de las expresiones (1.2) se puede extraer la condición bajo el cual la densidad local coincide con la densidad media, esto ocurre cuando la densidad local permanece constante, es decir, no cambia con la distribución espacial de carga o masa. En este contexto, se dice que la materia (la carga o masa) se encuentra ***distribuida uniformemente***, en cuyo caso podremos escribir:

$$\mathscr{D}_Q = \langle \mathscr{D}_Q \rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{D}_Q = \frac{Q}{\mathscr{E}} \quad \text{ó} \quad \mathscr{D}_M = \langle \mathscr{D}_M \rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{D}_M = \frac{M}{\mathscr{E}}. \tag{1.4}$$

Como el espacio presenta tres dimensiones, las cuales pueden descomponerse en longitud, área y volumen, entonces es posible construir tres distribuciones de carga o masa en que se puede conseguir los conglomerados de materia. Así, cuando el espacio corresponda a una longitud ($\mathscr{E} = \ell$), un área ($\mathscr{E} = A$) o un volumen ($\mathscr{E} = V$) entonces la densidad local se denominará lineal, superficial o volumétrica, denotándose $\mathscr{D}$ como λ, σ y ρ, respectivamente. Empleamos densidades lineales en situaciones donde la masa o carga se encuentra distribuida según a lo largo de un alambre, siempre que el espesor de alambre pueda ser despreciado frente a su longitud. En cambio, se emplea una densidad superficial de carga o masa cuando el conglomerado de materia se encuentre distribuida en una superficie, en cuyo caso se desprecia el espesor de dicha superficie. Finalmente, se emplea una distribución volumétrica de masa o carga cuando el conglomerado de materia se encuentra distribuida en una región con un volumen finito.

1.1. Densidades lineal de carga λ



Dado un alambre con carga Q y longitud ℓ_Q, como el mostrado en la imagen adjunta, entonces, la densidad lineal local de carga λ para dicho alambre se determina mediante el cociente entre un elemento infinitesimal de carga dq y la longitud de arco ds que la contiene, mientras que la densidad lineal promedio de carga $\langle\lambda\rangle$ se obtiene comparando la carga Q y aquella longitud que la contiene ℓ_Q. En este contexto,

$$\text{Densidad local lineal: } \lambda = \frac{dq}{ds} \quad \therefore \quad \text{Densidad media lineal: } \langle\lambda\rangle = \frac{Q}{\ell_Q} \tag{1.5}$$

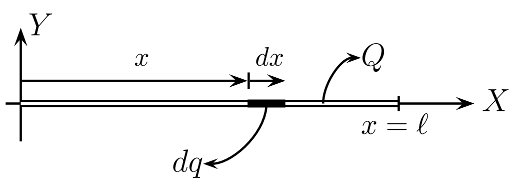
Donde ds es el elemento infinitesimal de longitud de arco, correspondiente alambre que contiene la carga. En cambio, la carga sobre el alambre viene determinada por la expresión (1.3), esto es,

$$Q = \int_{s_0}^{s_f} \lambda\, ds \tag{1.6}$$

Donde s_0 y s_f corresponde a los valores del parámetro s correspondientes a los extremos inicial y final del alambre.

Ejemplo 1.1 eje:1 *

Una varilla de longitud ℓ y carga Q es colocada horizontalmente sobre una mesa aislante, tomando un sistema de coordenada con origen en el extremo izquierdo de la barra, tal como se muestra en la figura de abajo, suponga que la carga se encuentra distribuida uniformemente y responda las siguientes preguntas:



(a) *¿Cuál será la densidad media lineal de carga?*
(b) *Determine la densidad local lineal de carga.*
(c) *Encuentre una expresión para la carga como función de la coordenada horizontal x, cuando ésta se encuentra distribuida uniformemente. Luego evalúe la carga para las ubicaciones $x = 0$, $\ell/2$ y ℓ.*

Ahora suponga que la carga de la varilla se distribuye de forma tal que aumenta linealmente con la coordenada horizontal x, por lo que la carga aumenta conforme aumenta dicha coordenada. Sobre la base de esta información responda nuevamente las preguntas de los incisos (b) *y* (c)*. Además, explique si la densidad media lineal de carga cambiaría con esta nueva distribución de carga.*

* *

Por otra parte, es posible cambiar del parámetro longitud de arco s a cualquier otro parámetro; en particular, si el alambre presenta la forma de una trayectoria que podría describir una partícula entonces es posible parametrizar al alambre parámetro tiempo t, incluso se podrá reparametrizar dicha longitud de arco en términos de una nueva coordenada u, usando regla de la cadena. En este sentido, se tiene que el elemento infinitesimal de longitud de arco viene determinado por la expresión:

$$ds = |\vec{v}(t)|dt = \left|\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right| dt = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{du}\right| \frac{du}{dt} dt = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{du}\right| du. \tag{1.7}$$

Mientras que $u = u(t)$ corresponde a un nuevo parámetro de la curva, tal que la función $u = u(t)$ sea monótona creciente. A continuación presentaremos algunas parametrizaciones simples

☞ Parametrización de una función: Dada una función $y = g(x)$ su parametrización natural consiste en tomar como parámetro la coordenada x, por lo que el alambre puede ser descrito mediante:

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge y = g(x)\right\} \quad \therefore \quad \vec{r}(x) = x\hat{\imath} + y(x)\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + g(x)\hat{\jmath}\,,$$

Además, se considera que los puntos A y B corresponden a los extremos inicial y final del alambre, es decir, $A = (a, g(a))$ y $B = (b, g(b))$. Por otra parte, tomando $u = x$ en la expresión (1.7) se llegará a la siguiente longitud de arco infinitesimal,

$$ds = \left|1\hat{\imath} + \frac{dg(x)}{dx}\hat{\jmath}\right| dx = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}dx\,,$$

donde $g'(x)$ representa la derivada de la función $g(x)$.

☞ Parametrización de una circunferencia: La parametrización más adecuada para una circunferencia, de radio R, proviene de usar funciones trigonométricas, tomando como parámetro el ángulo θ medido respecto al semieje horizontal positivo. Así, la circunferencia de radio R y centrada en el punto (x_0, y_0) queda parametrizada por:

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = x_0 + R\cos\theta \wedge y = y_0 + R\,\mathrm{sen}\,\theta \wedge \theta_A < \theta < \theta_B\right\}\,,$$

de manera que,

$$\vec{r}(\theta) = R\cos\theta\hat{\imath} + R\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath} = R(\cos\theta\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}).$$

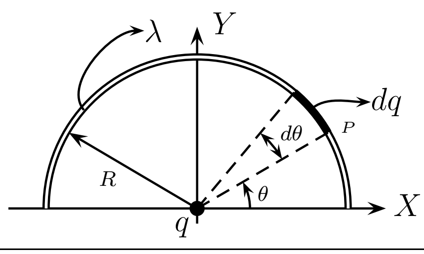
En este caso, los valores de los ángulos correspondiente a los extremos inicial y final vienen dados por θ_A y θ_B, respectivamente, los cuales deben estar conectados por la circunferencia de radio R, es decir, $A = (x_0 + R\cos\theta_A, y_0 + R\,\mathrm{sen}\,\theta_A)$ y $B = (x_0 + R\cos\theta_B, y_0 + R\,\mathrm{sen}\,\theta_B)$. Tomando $u = \theta$ en (1.7) tendremos que la longitud de arco infinitesimal se escribe como

$$ds = \left|R(\cos\theta\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath})\right| d\theta = Rd\theta.$$

Esta cantidad puede obtenerse geométricamente considerando un arco de circunferencia con abertura $d\theta$.

Ejemplo 1.2 eje:2* *

Consideremos una carga puntual Q colocada en el centro de un alambre en forma de semi-circunferencia, tal como se indica en la figura. El alambre presenta una carga distribuida uniformemente cuya densidad lineal de carga es dada por λ. El objetivo será determine la fuerza ejercida por la carga puntual sobre el alambre semi-circular.



(a) *Escriba el elemento infinitesimal de longitud de arco ds en términos del parámetro θ. Para ello use la parametrización de una circunferencia.*

(b) *Encuentre el campo eléctrico producido por la carga puntual q en el punto P, expréselo en términos de la coordenada angular θ.*

(c) *Finalmente, encuentre la fuerza ejercida sobre el elemento infinitesimal de carga dq, pensando que esta se comporta como una carga puntual, y luego integre dicha ecuación. Esto es, escriba $d\vec{F} = dq\vec{E}$ e integre. Use como variable de integración el parámetro θ, para ello considere que $dq = \lambda ds$.*

2. Campo eléctrico, mediante la ley de Coulomb, de distribuciones continuas

Es posible obtener campos eléctricos mediante la ley de Coulomb, todos estos campos son de origen electrostáticos en virtud a que su rotor es nulo. Para determinar el campo eléctrico de un cuerpo extenso y cargado en un punto P ubicado a una posición $\vec{r}_p$, fuera de la fuente, se toma un elemento infinitesimal de carga dq colocado en una posición arbitraria $\vec{r}_q$ sobre el cuerpo. El elemento de carga infinitesimal dq puede considerarse como una fuente puntual, el cual produce un elemento infinitesimal de campo en el punto P, tal como se indica en la Fig. 2.1.

Utilizando la ley de Coulomb, para obtener el elemento infinitesimal de campo, podemos escribir

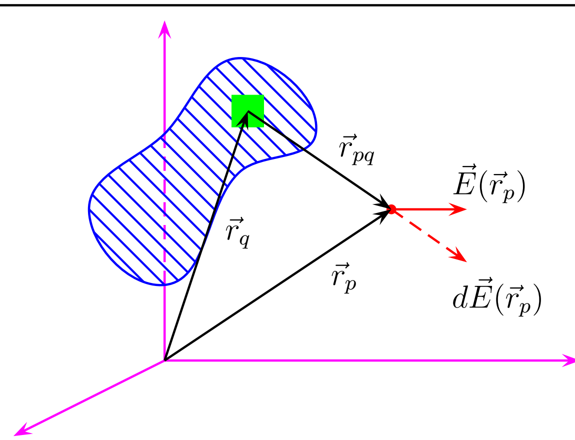
$$\texttt{eq:16} \quad d\vec{E}(\vec{r}_p) = K\,\frac{dq}{|\vec{r}_{pq}|^2}\,\widehat{r}_{pq} = K\,\frac{dq}{|\vec{r}_{pq}|^3}\,\vec{r}_{pq} \tag{2.8}$$

donde $\vec{r}_{pq} = \vec{r}_p - \vec{r}_q$ es la posición relativa desde el elemento de carga dq hasta el punto donde se desea calcular el campo. El campo eléctrico debido a toda la distribución continua de carga se obtiene al superponer cada uno de los elementos infinitesimales de carga; es decir, en el límite en que se realicen las infinitas superposiciones de los elementos de campo se obtendrá un campo eléctrico que coincide con la integral de la ecuación (2.8), para obtener

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = K\int_{\substack{\text{Toda la}\\ \text{Región del}\\ \text{cuerpo}}} \frac{\vec{r}_{pq}}{|\vec{r}_{pq}|^3}\,dq = K\int_{\substack{\text{Toda la}\\ \text{Región del}\\ \text{cuerpo}}} \frac{\vec{r}_{pq}}{|\vec{r}_{pq}|^3}\,\mathscr{D}_Q de \tag{2.9}$$

donde se ha sustituido (1.1) para expresar el elemento de carga en término de la densidad local, por lo que la integración es realizada en una región limitada del espacio donde se encuentra contenida la distribución de carga. De manera que, si el cuerpo se encuentra en una línea, superficie o volumen entonces habrá que reemplazar $\mathscr{D}_Q$ y de por λ, σ, ρ y ds, dA y dV, respectivamente.

Figura 2.1: Se muestra con líneas punteadas al campo eléctrico generado por un elemento infinitesimal de carga "dq" ubicado en la posición $\vec{r}_p$. Al superponer todos los elementos infinitesimales de carga se obtiene el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}_p)$ producido por distribución continua, en el punto $\vec{r}_p$, es decir, al integrar el elemento infinitesimal de campo $d\vec{E}(\vec{r}_p)$ en todo el espacio que contiene a la distribución de carga se genera como resultado de la integración al campo $\vec{E}(\vec{r}_p)$



2.1. Campo eléctrico generado por distribuciones de cargas lineales

Caso A: Anillo cargado

Consideremos un anillo de radio R y carga Q distribuida uniformemente en todo su longitud ($2\pi R$). El interés sobre este anillo radica en determinar el campo eléctrico en un punto arbitrario sobre el eje del anillo, el cual es una recta que pasa por el centro del anillo y es perpendicular al área de éste, tal y como se muestra en la Fig. 2.2. En la figura se ha escogido dos elementos infinitesimales de carga dq_1 y dq_2, como la carga está distribuida uniformemente entonces se puede elegir a su vez que $dq_1 = dq_2 \stackrel{\text{def}}{=} dq$. Cada elemento de carga genera un elemento de campo, que al superponerlos se observa que las componentes paralelas al radio del anillo se compensan entre si, dando como efecto neto un campo a lo largo del eje del anillo.

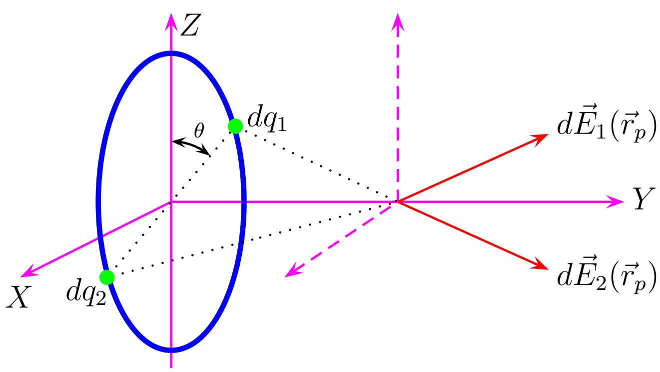


Figura 2.2: Se muestran dos elementos infinitesimales de campo eléctrico, cada campo es producido por un par de cargas puntuales que se encuentran diametralmente opuesta al anillo cargado. De esta geometría resulta claro que al superponer todos los elementos infinitesimales de cargas el campo resultante se encuentra dirigido a lo largo del eje Y.

Para obtener cada elemento infinitesimal de campo, basta considerar que el punto P está ubicado en la posición $\vec{r}_p = 0\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + 0\hat{k}$, además los elementos infinitesimales de carga dq_1 y dq_2 están ubicados en las posiciones $\vec{r}_{q_1} = -R\sin\theta\hat{\imath} + R\cos\theta\hat{k}$ y $\vec{r}_{q_2} = -\vec{r}_{q_1} = R\sin\theta\hat{\imath} - R\cos\theta\hat{k}$, respectivamente. El ángulo θ varía desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, ya que al sumar todos los elementos infinitesimales dq_1 simultáneamente se suma los elementos infinitesimales dq_2 desde $\theta = \pi$ hasta $\theta = 2\pi$. Sustituyendo estas cantidades en la ley de Coulomb para obtener,

$$\texttt{eq:7a} \quad d\vec{E}_1(\vec{r}_p) = K\frac{dq_1}{|\vec{r}_{pq_1}|^3}\,\vec{r}_{pq_1} = K\frac{dq}{(R^2+y^2)^{3/2}}(R\sin\theta\hat{\imath} + y\hat{\jmath} - R\cos\theta\hat{k}) \tag{2.10a}$$

$$\texttt{eq:7b} \quad d\vec{E}_2(\vec{r}_p) = K\frac{dq_2}{|\vec{r}_{pq_2}|^3}\,\vec{r}_{pq_2} = K\frac{dq}{(R^2+y^2)^{3/2}}(-R\sin\theta\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + R\cos\theta\hat{k}) \tag{2.10b}$$

superponiendo (2.10a) con (2.10b) se observa que la única componente que sobrevive está dirigida a lo largo del eje del anillo,

$$\texttt{eq:9} \quad d\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{2Kydq}{(R^2+y^2)^{3/2}}\,\hat{\jmath} \tag{2.11}$$

Este resultado, que es obtenido por superposición, también puede obtenerse por simetría. Una simetría es cualquier transformación espacial o temporal que mantiene invariante al sistema o a sus estados. Así, al considerar que el campo eléctrico en el punto P presenta una proyección sobre el eje X dada por $\vec{E}_x(P)$, ver Fig.2.3 (izquierda). Al rotar el sistema sobre el eje del anillo en un ángulo π, el sistema se mantiene invariante, por lo que cualquier componente del campo eléctrico debe permanecer invariante bajo esta transformación. Con ello se debe cumplir que $\widehat{Q}_{\pi,\widehat{y}}\vec{E}_x = \vec{E}_x$, donde $\widehat{Q}_{\pi,\widehat{y}}\vec{E}_x$ corresponde a la rotación de la componente x del campo eléctrico. De la Fig.2.3 (izquierda) se observa que esta rotación conduce a,

$$\widehat{Q}_{\pi,\widehat{y}}\vec{E}_x = -\vec{E}_x$$

como esta operación es una simetría del sistema, entonces la rotación deja invariante al campo eléctrico, resultando que,

$$\vec{E}_x = -\vec{E}_x \quad \therefore \quad \vec{E}_x = \vec{0}$$

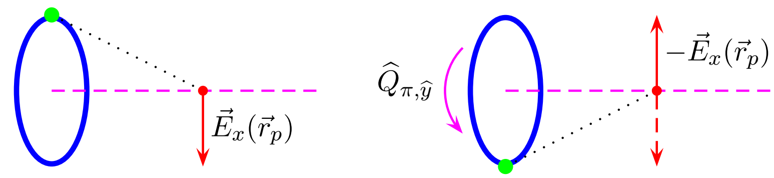


Figura 2.3: Uso de simetría para determinar la orientación del campo eléctrico generado por anillo.

Para obtener el campo de todo el anillo, regresemos a la expresión (2.11), teniendo en cuenta que la densidad lineal de carga $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$ permanece constante, es posible escribir el elemento de carga dq como,

$$\texttt{eq:8} \quad dq = \lambda d\ell = \frac{Q}{2\pi R}\, d(R\theta) = \frac{Qd\theta}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{dq = \frac{Q}{2\pi}\, d\theta} \tag{2.12}$$

sustituyendo esta expresión en (2.11) y luego integrando el elemento infinitesimal de campo, se obtiene el campo eléctrico en P debido al anillo,

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = \int_0^{\pi} \frac{2Ky}{(R^2+y^2)^{3/2}}\,\frac{Qd\theta}{2\pi}\,\hat{\jmath} = \frac{KQy}{(R^2+y^2)^{3/2}}\,\hat{\jmath}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{KQy}{(R^2+y^2)^{3/2}}\,\hat{\jmath}$$

esto permite concluir que el campo eléctrico sobre el eje de un anillo a una distancia x del centro del mismo vienen dado por:

$$\texttt{eq:18} \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{KQ}{(R^2+|\vec{r}_p|^2)^{3/2}}\,\vec{r}_p} \tag{2.13}$$

siendo $\vec{r}_p$ un vector cuya cola está en el centro del anillo y la punta es cualquier punto sobre el eje del anillo. Se puede llegar a este resultado integrando (2.10a) ó (2.10b) desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.

Problema 2.1 ✍

Considere dos anillos cargados uniformemente de radio a y b, de manera que los ejes de cada anillo coincide. El anillo de radio a posee carga $+Q$ y está a la derecha de otro anillo de carga $-Q$, cuyos centros están separados por una distancia D. Calcule el campo eléctrico en un punto P ubicado a una distancia x medido desde el centro del anillo derecho y sobre el eje de los anillo. ¿Qué fuerza actúa sobre una carga q ubicada en el punto P?

Caso B: Alambre recto finito y cargado

Consideremos un alambre de longitud ℓ el cual posee carga una carga Q distribuida uniformemente, para determinar el campo eléctrico de esta distribución en un punto P ubicado a una altura b y a una distancia a del extremo derecho del alambre, tal como se muestra en la Fig. 2.4. Para ello tomemos un

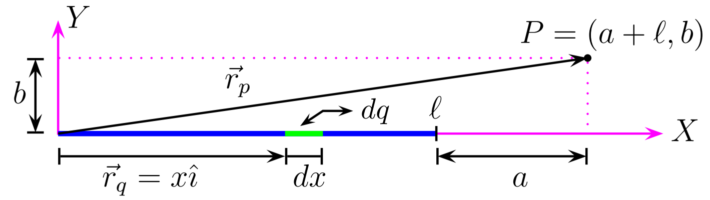


Figura 2.4: Configuración de un alambre de carga Q y longitud ℓ. Se ha ubicado el elemento infinitesimal de carga dq en una posición $\vec{r}_q$ con la intensión de obtener el campo eléctrico en el punto P.

elemento infinitesimal de carga dq ubicada en una posición $\vec{r}_q = x\hat{\imath}$.

El elemento infinitesimal de campo eléctrico, en el punto $\vec{r}_p = (\ell + a)\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$, generado por el elemento infinitesimal de carga dq ubicado en la posición $\vec{r}_q = x\hat{\imath}$ viene dado por la ley de Coulomb,

$$\texttt{eq:12} \quad d\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{K dq}{\left[(a+\ell-x)^2 + b^2\right]^{3/2}} \left[(a+\ell-x)\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\right]. \tag{2.14}$$

Teniendo en cuenta que la densidad lineal de carga $\lambda = \frac{Q}{\ell}$ permanece constante, es posible escribir el elemento de carga dq contenido en una longitud $d\ell = dx$ como,

$$\texttt{eq:13} \quad dq = \lambda d\ell = \frac{Q}{\ell}\, dx \quad \Longrightarrow \quad \boxed{dq = \frac{Q}{\ell}\, dx} \tag{2.15}$$

que al sustituirlo en (2.14) e integrando desde $x = 0$ hasta $x = \ell$ se obtiene el campo eléctrico del alambre finito,

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}_p) &= \frac{KQ}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{(a+\ell-x)\,\hat{\imath} + b\hat{\jmath}}{\left[(a+\ell-x)^2 + b^2\right]^{3/2}} dx \\
&= \frac{KQ}{\ell} \left[\hat{\imath} \int_0^{\ell} \frac{(a+\ell-x)dx}{\left[(a+\ell-x)^2 + b^2\right]^{3/2}} + b\hat{\jmath} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\left[(a+\ell-x)^2 + b^2\right]^{3/2}} \right] \\
&= \frac{KQ}{\ell} \left[\left. \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{(a+l-x)^2 + b^2}} \right|_{x=0}^{x=\ell} - \frac{b\hat{\jmath}}{b^2} \left. \frac{a+l-x}{\sqrt{(a+l-x)^2 + b^2}} \right|_{x=0}^{x=\ell} \right] \\
&= \frac{KQ}{\ell} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\ell+a)^2 + b^2}} \right) \hat{\imath} - \left(\frac{a/b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{(\ell+a)/b}{\sqrt{(\ell+a)^2+b^2}} \right) \hat{\jmath} \right]
\end{aligned}$$

Así, el campo eléctrico en el punto P con coordenadas $(\ell + a, b)$ toma la siguiente forma:

$$\texttt{eq:20} \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{KQ}{\ell} \left[\frac{b\hat{\imath} - a\hat{\jmath}}{b\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b\hat{\imath} - (\ell+a)\hat{\jmath}}{b\sqrt{(\ell+a)^2+b^2}} \right]} \tag{2.16}$$

Esta expresión nos permite obtener el campo eléctrico en varios puntos del plano, para ello basta con asignarle valores a las coordenadas del punto P.

- Campo a la mitad del alambre: Se quiere obtener una expresión para el campo eléctrico producido por una alambre sobre un eje transversal que corta a la mitad al alambre. Para ello basta con colocar $a = -\ell/2$ en (2.16), así:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{2KQ}{|\vec{r}_p|^2}\,\frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4|\vec{r}_p|^2}}\,\vec{r}_p} \tag{2.17}$$

  donde $\vec{r}_p = b\hat{\jmath}$ es un vector que está dirigido desde la mitad del alambre hasta en punto sobre el eje transversal que corta al alambre.

- Campo a un extremo del alambre: Se quiere obtener una expresión para el campo eléctrico producido por una alambre sobre un eje transversal que corta el extremo derecho del alambre. Para ello basta con colocar $a = 0$ en (2.16), así:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{KQ}{\ell}\left[\left(\frac{1}{|b|} - \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + b^2}}\right)\hat{\imath} + \frac{\ell/b}{\sqrt{\ell^2 + b^2}}\,\hat{\jmath}\right]} \tag{2.18}$$

  donde $\vec{r}_p = b\hat{\jmath}$ es un vector que está dirigido desde la mitad del alambre hasta en punto sobre el eje transversal que corta al alambre.

- Campo a un extremo lateral del alambre: Se quiere obtener una expresión para el campo eléctrico producido por una alambre sobre un extremo del eje del alambre, tal como se muestra en la figura . Para ello no basta con colocar $b = 0$ puesto que (2.16) es divergente al tomar ese límite. Sin embargo, al repetir el procedimiento se observa que la componente $\hat{\jmath}$ se anula cuando $b = 0$, en tal sentido basta tomar la componente $\hat{\imath}$ de (2.16) con $b = 0$ resultando:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{KQ}{\ell}\left[\frac{1}{|a|} - \frac{1}{|\ell + a|}\right]\hat{\imath}} \tag{2.19}$$

Caso C: Alambre recto infinito y semi-infinito cargado

Cuando se tienen distribuciones infinitas se dice que la fuente no se encuentra bien localizada, es decir no es posible ubicar a la carga absoluta precisión. Por ello, se requiere que la carga esté uniformemente distribuida en alguna región del espacio aunque esta se extienda al infinito. De esta manera, la densidad de carga permanece constante en cualquier punto sobre la distribución infinita. En tal sentido, para un alambre infinito se requiere que λ permanezca constante, es decir, en la medida en que la longitud del alambre tiende a infinito ($\ell \to \infty$) el cociente $\frac{Q}{\ell}$ que aparece en (2.15) permanece constante. Para determinar el campo eléctrico de un alambre infinito se hace tender a ℓ a infinito ($\ell \to \infty$) en (2.17). Este límite se toma considerando que $\lambda = Q/\ell$ permanece constante, resultando,

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{2K\lambda}{|\vec{r}_p|^2}\,\vec{r}_p} \tag{2.20}$$

siendo este el campo producido por un alambre infinito, sobre puntos que son radiales al eje del alambre, tal como se muestra en la figura 2.5.

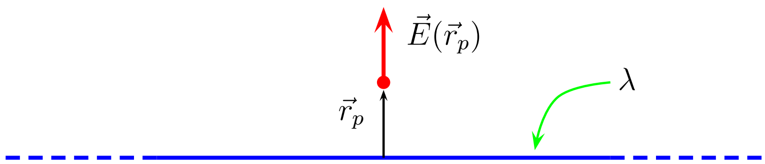


Figura 2.5: Se muestra el campo eléctrico generado por un alambre infinito cargado uniformemente con una densidad lineal de carga λ.

Ahora consideremos el campo producido por un alambre semi-infinito en un punto P ubicado en el extremo derecho y separado por una distancia horizontal a y una altura b, tal como se indica en la Fig. 2.6. Para determinar este campo eléctrico basta toma $\ell \to \infty$ en la expresión (2.16) manteniendo constante a la densidad lineal de carga λ, resultando,

$$\texttt{eq:14} \quad \vec{E}(\vec{r}_p) = K\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\imath} + \frac{1}{b}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)\hat{\jmath} \right] \tag{2.21}$$

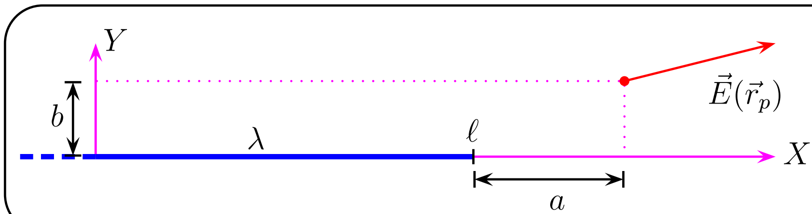


Figura 2.6: Campo eléctrico generado por un alambre semi-infinito en el punto P ubicado a una altura b y separado por una distancia a a la derecha del alambre.

2.2. Campo eléctrico generado por distribuciones de cargas superficiales

Caso A: Disco cargado

Considere un disco de radio b el cual tiene una carga Q distribuida uniformemente, estamos interesados en obtener el campo eléctrico generado por esta distribución continua; se puede proceder tomando un elemento infinitesimal de carga dq ubicado a una distancia r del centro del disco, y luego determinar el elemento infinitesimal de campo por medio de la ley de Coulomb. Al integrar esta expresión sobre distribución de carga se obtendrá el campo del disco. Sin embargo, se recorrerá un camino diferente. Un disco puede ser considerado como una sucesión concéntrica de anillo de radio variable; superponiendo esta sucesión de anillos se obtendrá el campo del disco cargado. La forma de tal proceder, es considerar un anillo de radio r y carga q distribuida uniformemente en todo el anillo. Este campo es el generado por un elemento infinitesimal de la carga del disco, por ello se reemplaza $\vec{E}_{\text{anillo}} = d\vec{E}_{\text{disco}}$ y $q = dQ$ donde dQ se encuentra distribuido en una franja igual a la longitud del anillo. Para ello, se considera al campo de un anillo de carga dq como un elemento infinitesimal de campo generado por el disco, tal como se indica en la Fig. **??**.

El campo eléctrico de un anillo, de carga q y radio r, en un punto sobre su eje es presentado en (2.13). Reemplazando $\vec{E}_{\text{anillo}} = d\vec{E}_{\text{disco}}$ y $q = dQ$, se tiene que el elemento infinitesimal de campo generado por

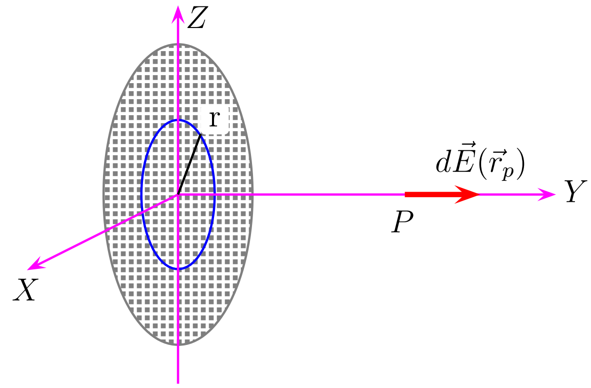


Figura 2.7: `fig:1`Se muestra un elemento infinitesimal de campo, el cual es generado por un elemento infinitesimal de carga dq. Estos elementos infinitesimales corresponden al campo eléctrico de un anillo de carga dQ y radio r, al variar el radio del anillo desde $r = 0$ hasta $r = b$ y superponer sus campos se obtiene el campo eléctrico generado por el disco

un anillo en el punto $\vec{r}_p = y\hat{\jmath}$ es,

$$\texttt{eq:10} \quad d\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{KydQ}{(r^2+y^2)^{3/2}}\,\hat{\jmath}\,. \tag{2.22}$$

Teniendo en cuenta que la densidad superficial de carga $\sigma = \frac{Q}{\pi b^2}$ permanece constante, ya que la carga Q se encuentra distribuida uniformemente, es posible escribir el elemento de carga dQ contenida en una franja cuya longitud coincide con el arco del anillo y su ancho es dr; de forma que $dA = 2\pi r dr$. De esta manera el elemento infinitesimal de carga es,

$$\texttt{eq:11} \quad dQ = \sigma dA = \frac{Q}{\pi b^2}\,(2\pi r dr) = \frac{2Q}{b^2}\,rdr \quad\Longrightarrow\quad \boxed{dQ = \frac{2Q}{b^2}\,rdr} \tag{2.23}$$

sustituyendo este elemento de carga dQ en (2.22) e integrando desde $r = 0$ hasta $r = b$ para obtener el campo eléctrico de un disco cargado,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_p) &= \int_0^b \frac{2Kydq}{(r^2+y^2)^{3/2}}\,\frac{2Q}{b^2}\,rdr\,\hat{\jmath} = \frac{4KyQ}{b^2}\,\hat{\jmath}\int_0^b \frac{rdr}{(r^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{4KyQ}{b^2}\,\hat{\jmath}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+y^2}}\Bigg|_{r=0}^{r=b}\right] = \frac{4KQ}{b^2}\left[\frac{y\hat{\jmath}}{|y|} - \frac{y\hat{\jmath}}{\sqrt{b^2+y^2}}\right] \end{aligned}$$

recordando que $\vec{r}_p = y\hat{\jmath}$, y teniendo en cuenta que $\hat{r}_p = \frac{y\hat{\jmath}}{|y|}$, entonces el campo eléctrico toma la siguiente expresión,

$$\texttt{eq:19} \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}_p) = \frac{4KQ}{b^2}\left[\hat{r}_p - \frac{1}{\sqrt{b^2+|\vec{r}_p|^2}}\,\vec{r}_p\right]} \tag{2.24}$$

Problema 2.2

Considere un disco de radio interior a y exterior b, al cual se le distribuye uniformemente una carga Q. (a) Determine el campo eléctrico de esta distribución a partir de la ley de Coulomb. (b) Llegue al mismo resultado usando directamente el resultado (2.24) *y el principio de superposición.*